

Primljen / Received: 12.2.2013.

Ispravljen / Corrected: 21.8.2013.

Prihvaćen / Accepted: 17.9.2013.

Dostupno online / Available online: 10.10.2013.

Analiza vibracija okvirnih konstrukcija uzrokovanih prometom

Autori:



Izv.prof.dr.sc. **Mira Petronijević**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Beogradu
Građevinski fakultet
pmira@grf.bg.ac.rs



Dr.sc. **Marija Nefovska Danilović**, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Beogradu
Građevinski fakultet
marija@grf.bg.ac.rs



Marko Radišić, dipl.ing.građ.
Sveučilište u Beogradu
Građevinski fakultet
marko.radisic@gmail.com

Prethodno priopćenje

Mira Petronijević, Marija Nefovska Danilović, Marko Radišić

Analiza vibracija okvirnih konstrukcija uzrokovanih prometom

U radu je prikazan jednostavan numerički model za proračun vibracija ravninske okvirne konstrukcije u frekvencijskoj domeni, primjenom spektralnih elemenata u kome je međudjelovanje tla i zgrade uzeto u obzir. Dinamička krutost krutog temelja određena je metodom integralne transformacije. Analizirane su tri okvirne konstrukcije različite katnosti na djelovanje vibracija od tramvajskog i cestovnog prometa. Razmatran je utjecaj tla na vlastite frekvencije i odgovor konstrukcije. Analiza djelovanje vibracija na ljude provedena je prema britanskom standardu BS:6472.

Ključne riječi:

vibracije od prometa, okvirna konstrukcija, metoda integralne transformacije, međudjelovanje tla i građevine

Preliminary note

Mira Petronijević, Marija Nefovska Danilović, Marko Radišić

Analysis of frame structure vibrations induced by traffic

A simple numerical model for the dynamic analysis of 2D frames in the frequency domain, based on the Spectral Element Method (SEM), is presented in the paper. The influence of soil-structure interaction is taken into account. The dynamic stiffness of rigid foundations is determined by the Integral Transform Method (ITM). Three frames with a different number of storeys are analyzed with respect to vibrations caused by tram and road traffic. The influence of the soil-structure interaction on modal frequencies and amplitudes of vibrations is considered. The assessment of the way in which humans are affected by traffic-induced vibrations is conducted according to British Standard BS:6472.

Key words:

traffic induced vibrations, frame structure, integral transform method, soil-structure interaction

Vorherige Mitteilung

Mira Petronijević, Marija Nefovska Danilović, Marko Radišić

Analyse verkehrsbedingter Vibrationen von Rahmenkonstruktionen

In der vorliegenden Arbeit ist ein einfaches, auf der Spektrale-Elemente-Methode (SEM) beruhendes, numerisches Model für die dynamische Analyse von 2D Rahmen in der Frequenzdomäne dargestellt, das die Boden-Bauwerk-Interaktion berücksichtigt. Die dynamische Steifigkeit des Bodens ist mittels der Integraltransformationsmethode (ITM) berechnet. Drei Rahmenkonstruktionen verschiedener Anzahl von Stockwerken sind unter dem Einfluss verkehrsbedingter, durch Straßen- und Straßenbahnverkehr verursachter Vibrationen analysiert. Dabei sind der Einfluss von Boden-Bauwerk-Interaktion auf die Modalfrequenzen und Vibrationsamplituden. Eine Bewertung der verkehrsbedingten Vibrationen in Bezug auf den Menschen, nach den Anordnungen des British Standard BS:6472, ist dargestellt.

Schlüsselwörter:

verkehrsbedingte Vibrationen, Rahmenkonstruktion, Integraltransformationsmethode, Boden-Bauwerk-Interaktion

1. Uvod

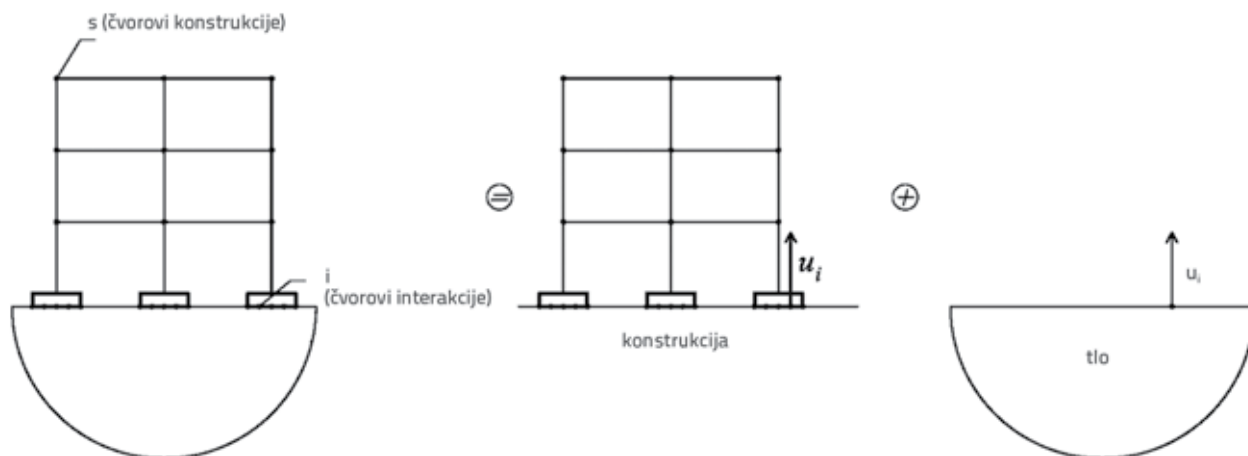
Porast broja stanovništva i ubrzani rast gradova uzrok je naglom porastu prometa u njima. Značajnije vibracije uzrokuju teška vozila kao što su autobusi, kamioni i tramvaji. Vibracije uzrokovane prometom su niskofrekvencijski poremećaji nastali uslijed djelovanja dinamičkih i oscilatornih sila kotača. Poremećaji se šire kroz tlo u svim pravcima, prolaze kroz temelje građevina i izazivaju vibracije koje mogu nepovoljno djelovati na zgrade, ljude ili osjetljivu opremu. Generiranje vibracija, mehanizam prenošenja vibracija kroz tlo, djelovanje na ljude i njihovo zdravlje, djelovanje na zgrade, kao i mjere za njihovu redukciju jesu predmet istraživanja u mnogim zemljama [1, 2]. Potreba da se predvidi djelovanje vibracija uzrokovanih prometom na zgrade, dovela je do razvoja velikog broja različitih numeričkih modela [3, 4]. Cjelovit numerički model koji analizira prenošenje vibracija kroz tlo od izvora do građevine i vibracije u samoj građevini, tzv. *source-receiver* model, veoma je složen i zasniva se na općim metodama analize interakcije tla i građevine [5]. Za rješenje problema u detaljnoj dinamičkoj analizi primjenjuje se metoda konačnih elemenata u frekvencijskoj domeni ili kombinacija graničnih (*boundary*) i konačnih elemenata [3]. Međutim, metode nisu jednostavne i njihova primjena je povezana s određenim numeričkim problemima. S druge strane, modeli koji se temelje na primjeni postojećih komercijalnih programa nisu u stanju obuhvatiti sve aspekte ovog problema. Tako je u radu [4] prikazana analiza djelovanja prometa na ravninske (2D) armiranobetonske okvire primjenom programa ETABS, pri čemu dvije veoma važne komponente: utjecaj tla i vertikalne vibracije konstrukcije, nisu uzete u obzir. Analiza AB okvira primjenom spektralnih elemenata [6] predstavlja poboljšanje prethodnog modela, međutim ni u ovom radu interakcija tla i zgrade nije uzeta u obzir. Budući da dinamički odgovor zgrade ovisi o dinamičkim karakteristikama sustava tlo-zgrada, potrebno je pravilno modelirati i konstrukciju

i tlo. Jedna od metoda kojom je to moguće relativno jednostavno učiniti jest metoda podstruktura [4]. U njoj se sustav tlo-zgrada razmatra kao skup dviju podstruktura potpuno različitih karakteristika. Jedna podstruktura, zgrada, ima konačne dimenzije tj. ograničena je, dok je druga podstruktura, tlo, beskonačna tj. neograničena. Za modeliranje zgrade se obično primjenjuje metoda konačnih elemenata, dok se tlo može modelirati primjenom neke od numeričkih metoda: metode konačnih elemenata, metode graničnih elemenata, ili primjenom analitičkih metoda, kao što je npr. metoda integralne transformacije (MIT) [7].

Cilj je ovog rada formiranje jednostavnog numeričkog modela za analizu 2D okvira izloženih djelovanju vibracija uzrokovanih prometom, u kojem će se utjecaj interakcije konstrukcije i tla uzeti u obzir. Analiza je provedena u frekvencijskoj domeni primjenom metode podstruktura. Konstrukcija je modelirana primjenom spektralnih elemenata, dok je dinamička matrica krutosti temelja računana primjenom metode integralne transformacije, uz pretpostavku da je temelj beskonačno krut, temeljen na površini elastičnog poluprostora. Razvijen je program za numeričku analizu u programskom jeziku MATLAB [8]. Analizirano je djelovanje vibracija uzrokovanih prometom na tri dvobrodna armiranobetonska okvira od po 2, 6 i 12 katova uslijed dva prometna opterećenja različitih frekvencijskih karakteristika: tramvaja i kamiona preko gumene prepreke, s ciljem da se promotri utjecaj katnosti konstrukcije i frekvencijskih karakteristika vozila na odgovor sustava.

2. Metoda podstruktura

Na slici 1. prikazan je ravninski (2D) model sustava tlo-konstrukcija koji je izložen vibracijama uzrokovanih prometom. Sastoji se od dvije podstrukture, armiranobetonskog okvira i tla. U jednadžbama su čvorovi konstrukcije označeni slovom *s* (*structure*), dok su čvorovi na kontaktu konstrukcije i tla označeni slovom *i* (*interaction*).



Slika 1. Sustav tlo-konstrukcija

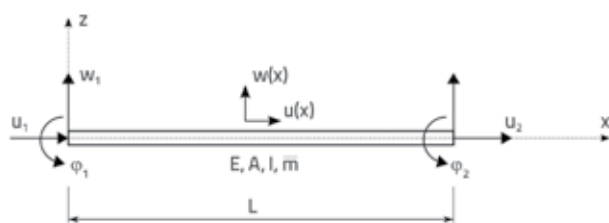
Dinamička jednadžba sustava tlo-konstrukcija u metodi podstruktura, formulirana u frekvencijskoj domeni u funkciji totalnog pomaka, predstavlja sustav linearnih algebarskih jednadžbi s kompleksnim koeficijentima

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss}^S & \mathbf{K}_{sl}^S \\ \mathbf{K}_{ls}^S & \mathbf{K}_{ll}^S + \mathbf{K}_l^F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_s \\ \hat{\mathbf{u}}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_l^F \hat{\mathbf{u}}_l \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdje su \mathbf{K}_{ss}^S , \mathbf{K}_{sl}^S , \mathbf{K}_{ls}^S i \mathbf{K}_{ll}^S dinamičke submatrice krutosti konstrukcije, \mathbf{K}_l^F je dinamička matrica krutosti temelja, $\hat{\mathbf{u}}_s$ i $\hat{\mathbf{u}}_l$ su redom amplitude vektora totalnog pomaka čvorova konstrukcije (s) i čvorova na kontaktu (l), slika 1.b, dok je $\hat{\mathbf{u}}_l$ amplituda vektora pomaka tla uslijed prometa u tzv. *slobodnom polju*, tj. u tlu gdje nema konstrukcije, slika 1.c, [5]. Jednadžba vrijedi za svaku frekvenciju ω iz promatranog opsega frekvencija. Sve navedene sub-matrice i amplitude vektora pomaka frekvencijski su zavisne.

3. Metoda spektralnih elemenata

U analizi vibracija primjenom metode konačnih elemenata veličina elementa zavisi od najviše frekvencije u analizi, što znači da za visoke frekvencije broj elemenata u modelu može biti veoma velik. Kod spektralnih elemenata dinamička matrica krutosti se dobiva iz interpolacijskih funkcija koje su točno rješenje diferencijalne jednadžbe kretanja elementa, tako da jedan spektralni element može točno predstaviti dinamičko ponašanje elementa bez obzira na frekvenciju vibracija. Njihovom primjenom se smanjuje broj elemenata, a samim time i broj nepoznanica u numeričkom modelu te se povećava točnost analize. Dinamičku matricu krutosti za Euler - Bernoullievu gredu izveo je prvi Kolousek godine 1941. Kasnije su izvedene dinamičke matrice krutosti grede s utjecajem smicanja i rotacijske inercije, tj. dinamičke matrice krutosti za elemente izložene aksijalnom naprezanju u kombinaciji sa savijanjem i torzijom [9, 10, 11]. Iako spektralni elementi imaju prednost nad konačnim elementima u dinamičkoj analizi linijskih sustava, postoji samo nekoliko primjera u kojima se oni koriste za analizu vibracija sustava koji se sastoje od jednog elementa ili u analizi najjednostavnijih okvira [6, 12, 13, 14, 15, 16].



Slika 2. Euler - Bernoulliev spektralni element

Dinamička matrica krutosti Euler – Bernoullievog spektralnog elementa (slika 2.) dobivena je na osnovi dinamičkih matrica krutosti za aksijalno naprezanje i savijanje grede. Dinamičke matrice krutosti za aksijalne i fleksijske vibracije mogu se

odrediti iz principa virtualnog rada

$$\mathbf{K}_0 = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV - \omega^2 \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (2)$$

gdje je \mathbf{E} matrica elastičnih konstanti, \mathbf{N} matrica interpolacijskih funkcija za odgovarajući slučaj naprezanja, a $\mathbf{B} = \mathbf{N}'$ za slučaj aksijalnog naprezanja, odnosno $\mathbf{B} = \mathbf{N}'$ za slučaj savijanja [13]. Interpolacijske funkcije zadovoljavaju diferencijalne jednadžbe pomaka

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3)$$

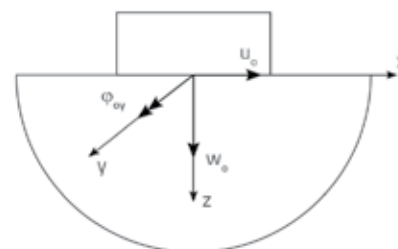
Rješenje diferencijalnih jednadžbi može se prikazati u obliku Fourierovih redova

$$u(x,t) = \sum_n \hat{u}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad w(x,t) = \sum_n \hat{w}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (4)$$

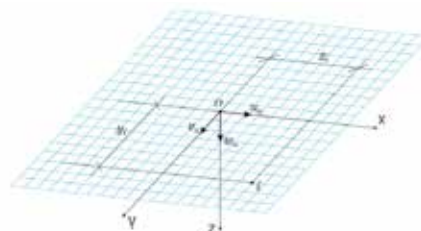
u kojima $\hat{u}_n(x, \omega_n)$ i $\hat{w}_n(x, \omega_n)$ predstavljaju redom spektralne komponente pomaka u smjeru x i z, frekvencije ω_n . Zadovoljavanjem diferencijalnih jednadžbi pomaka i rubnih uvjeta na krajevima elementa, dobivaju se interpolacijski polinomi za aksijalne i fleksijske vibracije. Na osnovi jednadžbe određuju se dinamičke matrice krutosti za aksijalno naprezanje i savijanje \mathbf{K}_D^S i \mathbf{K}_D^F u funkciji geometrije grede i frekvencije ω . Izrazi za ove matrice dani su u Dodatku rada, a detaljan izvod može se naći u literaturi [9, 13, 15].

4. Dinamička matrica krutosti temelja

Dinamička matrica krutosti temelja izvedena je pod pretpostavkom da je temelj prizmatičan, beskonačno krut i da je temeljen na elastičnom, izotropnom poluprostoru, slika 3.



Slika 3. Kruti temelj na poluprostoru



Slika 4. Kontaktna površina temelja i tla

Kruti temelj ima tri stupnja slobode u ravnini xOz, koji se mogu opisati komponentama vektora pomaka i rotacijom središta

temelja O. Vektori amplituda sila $\hat{\mathbf{P}}_0$ i pomaka $\hat{\mathbf{u}}_0$ središta temelja O, za određenu frekvenciju ω , su

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \begin{bmatrix} \hat{P}_x \\ \hat{P}_z \\ \hat{M}_y \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}_0 = \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{w}_z \\ \hat{\phi}_{y0} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Između vektora sila $\hat{\mathbf{P}}_0$ i vektora pomaka $\hat{\mathbf{u}}_0$ može se uspostaviti veza

$$\hat{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{K}_0 \hat{\mathbf{u}}_0 \quad (6)$$

u kojoj \mathbf{K}_0 predstavlja dinamičku matricu krutosti krutog temelja

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & k_{x\phi} \\ 0 & k_{zz} & 0 \\ k_{\phi x} & 0 & k_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Elementi matrice krutosti su funkcije frekvencije ω . Za temelj na površini poluprostora element $k_{x\phi} \cong 0$.

Dinamička matrica krutosti temelja dobiva se iz dinamičke matrice krutosti \mathbf{K}_{ij}^F kontaktne površine tla i temelja (slika 4.) izjednačavanjem energija deformacije krutog i fleksibilnog temelja [19]. Dinamička matrica krutosti tla \mathbf{K}_{ij}^F daje vezu između vektora sila \mathbf{P}_{ij} i vektora pomaka \mathbf{u}_{ij} svih točaka na kontaktnoj površini temelja i tla

$$\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{K}_{ij}^F \mathbf{u}_{ij} \quad (8)$$

i može se lako odrediti inverzijom matrice fleksibilnosti tla

$$\mathbf{K}_{ij}^F = (\mathbf{F}_{ij}^F)^{-1} \quad (9)$$

Element f_{ij} dinamičke matrice fleksibilnosti tla \mathbf{F}_{ij}^F predstavlja pomak u točki i na kontaktnoj površini uslijed jedinične harmonijske sile na mjestu j . Pomaci na kontaktu uslijed jedinične harmonijske sile određuju se iz Lamove valne jednačbe gibanja u homogenom, elastičnom prostoru [17]

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} = \rho \ddot{u}_i \quad i = x, y, z \quad (10)$$

u kojoj su λ i μ Lamove konstante, ρ je gustoća tla, a u_i je komponenta vektora pomaka. Jednačba se može riješiti na više načina, numerički ili analitički. Jedan od načina je i metoda integralne transformacije (MIT) [18, 19] koja je shematski prikazana na slici 5.



Slika 5. Shema metode integralne transformacije

U metodi integralne transformacije, primjenom Helmholtz-ove dekompozicije [17] i trostruke Fourier-ove transformacije $x \leftrightarrow k_x, y \leftrightarrow k_y, t \leftrightarrow \omega$ [20], parcijalne diferencijalne jednačbe gibanja prevode se u obične diferencijalne jednačbe po z :

$$\begin{aligned} (k_p^2 - k_x^2 - k_y^2)\Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= 0 \\ (k_s^2 - k_x^2 - k_y^2)\Psi_i + \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} &= 0, \quad i = x, y \end{aligned} \quad (11)$$

gdje su $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ i $\Psi^T = [\Psi_x \Psi_y \Psi_z]^T$ skalarni i vektorski potencijal pomaka, $k_p = \omega/c_p$ i $k_s = \omega/c_s$ predstavljaju redom valne brojeve, a

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (12)$$

valne su brzine longitudinalnih (P) i transverzalnih (S) valova. Pretpostavlja se da je $\Psi_z = 0$.

Jednačbe se rješavaju analitički u transformiranoj domeni, a rješenje se zatim inverznom Fourier-ovom transformacijom vraća u prvobitnu domenu. Rješavanjem jednačbi, vodeći računa o Sommerfeldovom radijacijskom uvjetu, dobiva se vektor pomaka proizvoljne točke na kontaktnoj površini poluprostora i temelja

$$\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ik_x e^{-\lambda_1 z} & 0 & \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} \\ ik_y e^{-\lambda_1 z} & -\lambda_2 e^{-\lambda_2 z} & 0 \\ -\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} & -ik_y e^{-\lambda_2 z} & ik_x e^{-\lambda_2 z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_{2x} \\ B_{2y} \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdje su A_2, B_{2x} i B_{2y} integracijske konstante, a

$$\lambda_1^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_p^2 \quad \text{ i } \quad \lambda_2^2 = k_x^2 + k_y^2 - k_s^2 \quad (14)$$

Vrijednosti integracijskih konstanti se određuju iz graničnih uvjeta po naprezanjima na kontaktnoj površini. Vektor naprezanja na kontaktu temelja i poluprostora se dobiva iz Hooke-ovog zakona i veze između pomaka i deformacije, u obliku

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_z \\ \hat{\tau}_{zx} \\ \hat{\tau}_{zy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_z^2 - k_s^2 & 2ik_x \lambda_2 & -2ik_y \lambda_2 \\ -2ik_y \lambda_1 & \lambda_2^2 + k_y^2 & -k_x k_y \\ -2ik_x \lambda_1 & k_x k_y & -(\lambda_2^2 + k_x^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_{2x} \\ B_{2y} \end{bmatrix} \quad (15)$$

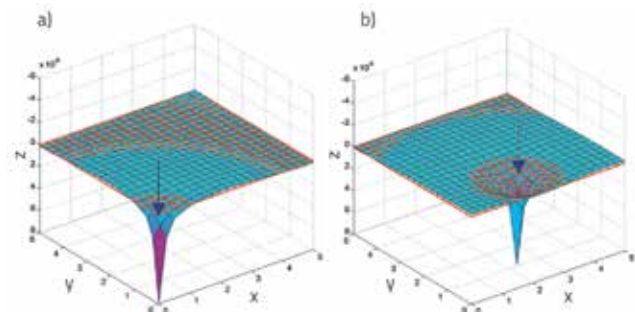
gdje je $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$ prema [18].

Elementi matrice fleksibilnosti određuju se numerički [19]. Kontaktna površina temelja i tla dijeli se na $N \times N$ točaka interakcije i , slika 4. Pretpostavlja se da je okvir u ravnini xOz , tako da promatramo pomake u i w u smjeru osi x i z . To znači da je red matrice fleksibilnosti, $\mathbf{F}_{ij}^F, 2N \times 2N$. Teorijski, potrebno je zadati jediničnu harmonijsku silu u svakoj točki na kontaktnoj površini u smjeru x i z i za svaku frekvenciju ω izračunati odgovarajuće pomake. Ti pomaci predstavljaju elemente matrice fleksibilnosti za zadanu frekvenciju. Praktično, polje pomaka se određuje samo jednom za svaku frekvenciju ω , za

silu koja djeluje u točki (i,j) , slika 6.a. Polje pomaka za silu koja djeluje u bilo kojoj drugoj točki (m,n) , slika 6.b, dobiva se na osnovi odnosa

$$u_z(m+k, n+l) = u_z(i+k, j+l) \quad (16)$$

gdje k i l predstavljaju inkremente indeksa i i j .



Slika 6. Pomaci točaka na kontaktnoj površini poluprostora uslijed jedinične harmonijske sile

Dinamička matrica krutosti odgovarajućeg krutog, prizmatičnog temelja, bez mase (slika 3.) dobiva se iz dinamičke matrice krutosti kontaktne površine tla i temelja \mathbf{K}_{ij}^F transformacijom

$$\mathbf{K}_o = \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{ij}^F \mathbf{a} \quad (17)$$

gdje je \mathbf{a} kinematička matrica

$$\mathbf{a}^T = [\mathbf{a}'_1 \dots \mathbf{a}'_i \dots \mathbf{a}'_N]_{3 \times 2N} \quad (18)$$

Ona definira vezu između vektora pomaka svih čvorova na kontaktnoj površini i vektora pomaka $\hat{\mathbf{u}}_o$ točke O. Svaka submatrica \mathbf{a}_i daje vezu između vektora pomaka $\hat{\mathbf{u}}_o$ točke i i vektora pomaka $\hat{\mathbf{u}}_o$ točke O

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{a}_i \hat{\mathbf{u}}_o \quad (19)$$

Matrica \mathbf{a} se dobiva jednostavnim kinematičkim razmatranjem u obliku

$$\mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_i \end{bmatrix} \quad (20)$$

gdje je x_i koordinata čvora i .

Dinamička matrica krutosti temelja \mathbf{K}_o je frekvencijski zavisna matrica čiji su elementi $K_{ij,o}$ kompleksni brojevi. Svaki element $K_{ij,o}$ se može napisati kao zbroj realnog i imaginarnog člana

$$K_{ij,o}(\mathbf{a}_o) = \text{Re}(K_{ij,o}(\mathbf{a}_o)) + \text{Im}(K_{ij,o}(\mathbf{a}_o)), \quad i, j = x, z, \varphi_y \quad (21)$$

gdje je $\mathbf{a}_o = \omega B / c_s$ bezdimenzijska frekvencija, a zB je dimenzija temelja. Bezdimenzijske vrijednosti realnog i imaginarnog dijela dinamičke matrice krutosti nazivaju se *funkcije impedancije*. Pri tome realni dio $K_{ij,o}$ predstavlja krutost, dok imaginarni dio predstavlja radijacijsko prigušenje temelja.

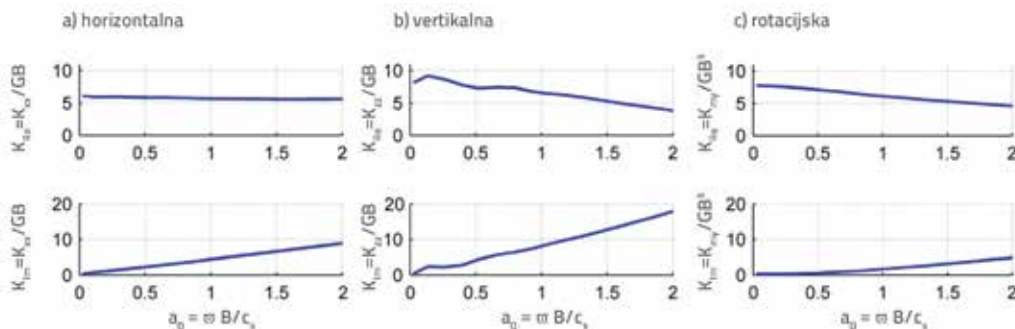
Primjenom navedenog postupka izračunane su funkcije impedancije beskonačno krutog, kvadratnog temelja temeljenog na poluprostoru, za opseg frekvencija $\mathbf{a}_o \in (0, 2)$, [21]. Ove funkcije, prikazane na slici 7., primijenjene su u proračunu vibracija okvira uzrokovanih prometom. Materijalno prigušenje u frekvencijskoj domeni zadaje se preko kompleksnih modula

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}(1 + i\eta), \quad \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}(1 + i\eta) \quad (22)$$

gdje je η koeficijent histereznog prigušenja. Ovakav način zadavanja materijalnog prigušenja predstavlja dodatnu prednost analize u frekvencijskoj domeni, jer omogućava da se pojedinim elementima numeričkog modela zadaju različiti koeficijenti prigušenja. U analizi interakcije tla i konstrukcije to je veoma značajno jer se materijalno prigušenje u tlu i konstrukciji znatno razlikuje. Osim toga, radijacijsko prigušenje u tlu se direktno uzima u obzir preko funkcija impedancije.

6. Proračun vibracija okvira uzrokovanih prometom

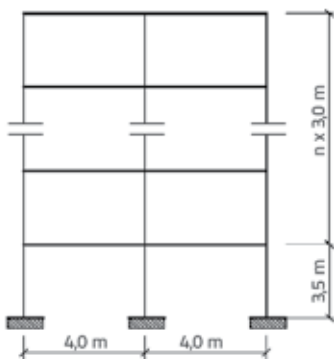
Kako bi se utvrdio utjecaj vibracija uzrokovanih prometom na AB zgrade različite katnosti, analizirana su tri dvobrodna armiranobetonska okvira sa 2, 6 i 12 katova (slika 8.). Proračun



Slika 7. Bezdimenzijske funkcije impedancije za kvadratni temelj na elastičnom poluprostoru

je proveden primjenom navedenog numeričkog modela i programa napisanog u MATLABU.

Raspon između stupova okvira je 4,0 m, visina prvog kata 3,5 m, dok je visina ostalih katova 3,0 m. Masa svakog kata iznosi 9 t i raspoređena je kao dodatna masa po gredama okvira. Usvojen je koeficijent prigušenja od 5 %. Geometrijske karakteristike okvira na slici 8. prikazane su u tablici 1.



Materijalne karakteristike okvira:

$E = 2 \cdot 10^7 \text{ [kN/m}^2\text{]}$
 $\rho = 2,4 \text{ [kN/m}^3\text{]}$
 $\nu = 0,15$

Broj katova: 2, 6, 12

Slika 8. Karakterističan okvir

Razmatrana su dva granična slučaja oslanjanja. U prvom slučaju su stupovi upeti, dok su u drugom slučaju stupovi okvira temeljeni na krutim kvadratnim temeljima bez mase, dimenzija 2x2 m, koji leže na elastičnom homogenom poluprostoru. Karakteristike poluprostora su:

- gustoća: $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$
- brzina posmičnih valova: $c_s = 100 \text{ m/s}$
- Poissonov koeficijent: $\nu = 0.33$
- koeficijent prigušenja: 2 %.

Da bi se istaknuo utjecaj radijacijskog prigušenja na odgovor sustava tlo-konstrukcija, usvojen je minimalni koeficijent materijalnog prigušenja u tlu.

Tablica 2. Vlastite frekvencije horizontalnih vibracija okvira za slučaj upetog i fleksibilnog oslanjanja [Hz]

Oblik	Dvokatni okvir			Šesterokatni okvir			Dvanaesterokatni okvir		
	Upeto	Fleksibilno	Δ [%]	Upeto	Fleksibilno	Δ [%]	Upeto	Fleksibilno	Δ [%]
1	2,37	2,29	3,4	1,08	10,1	6,5	0,62	0,56	9,7
2	7,49	7,4	1,2	3,22	3,11	3,4	1,81	1,74	3,9
3				5,48	5,36	2,2	3,21	3,11	3,1
4				7,95	7,81	1,8	4,7	4,55	3,2
5				10,71	10,55	1,5	6,34	6,14	3,2

Tablica 3. Vlastite frekvencije vertikalnih vibracija okvira za slučaj upetog i fleksibilnog oslanjanja [Hz]

Oblik	Dvokatni okvir			Šesterokatni okvir			Dvanaesterokatni okvir		
	Upeto	Fleksibilno	Δ [%]	Upeto	Fleksibilno	Δ [%]	Upeto	Fleksibilno	Δ [%]
1	15,79	15,44	2,2	12,22	10,55	13,7	8,11	7,9	2,6
2	18,06	21,68	-20,0	13,41	12,8	4,5	13,83	11,58	16,3
3	19,31	50,8	-163,1	16,68	16,24	2,6	16,74	13,57	18,9
4	22,21	57,5	-158,9	18,34	18,09	1,4	18,13	15,93	12,1
5	39,53	63	-59,4	19,25	19,94	1,6	18,83	18,76	0,3

Tablica 1. Geometrijske karakteristike okvira

Okvir	Stupovi		Grede [cm]
	vanjski [cm]	unutarnji [cm]	
Dvokatni	20x30	25x30	23x40
Šesterokatni	20x30	25x50 (1-2 kat) 25x40 (3-5 kat) 25x30 (6 kat)	
Dvanaesterokatni	25x40 (1-5 kat) 20x35 (6-8 kat) 20x30 (9-12 kat)	25x80 (1-2 kat) 25x70 (3-4 kat) 25x60 (5-7 kat) 25x50 (8-10 kat) 25x40 (11-12 kat)	

6.1. Utjecaj međudjelovanja tla i konstrukcije na vlastite frekvencije okvira

Tlo mijenja vlastite frekvencije vibracija sustava. U literaturi se mogu naći približne metode za određivanje vlastitih frekvencija okvira s utjecajem međudjelovanja tla i konstrukcije. U radu [22] je analiziran utjecaj elastičnosti temelja na visoke građevine primjenom kontinuiranog proračunskog postupka. Prednost je metode spektralnih elemenata u tome što se relativno jednostavno i učinkovito mogu odrediti točne vrijednosti vlastitih frekvencija elastično temeljenog okvira u kojem se i prigušenje tla (radijacijsko i materijalno) uzima u obzir. Vlastite frekvencije se dobivaju iz uvjeta da je determinanta dinamičke matrice krutosti sustava tlo-konstrukcija jednaka nuli:

$$\det \mathbf{K} = |\mathbf{K}| = 0 \tag{23}$$

Problem određivanja vlastitih vrijednosti je transcendentalan. Praktički postoji beskonačno mnogo vlastitih vrijednosti koje se mogu naći primjenom različitih tehnika pretraživanja. U

ovom radu su vlastite frekvencije ω_i određene kao točke u kojima logaritamska funkcija ima maksimalne vrijednosti

$$f(\omega) = \log \frac{1}{|K(\omega)|} \quad (24)$$

Vlastite frekvencije horizontalnih i vertikalnih vibracija okvira za slučaj upetog i fleksibilnog oslanjanja prikazane su u tablicama 2. i 3. Razlika Δ između vlastitih frekvencija upetog i fleksibilno oslonjenog okvira dana je u postotcima.

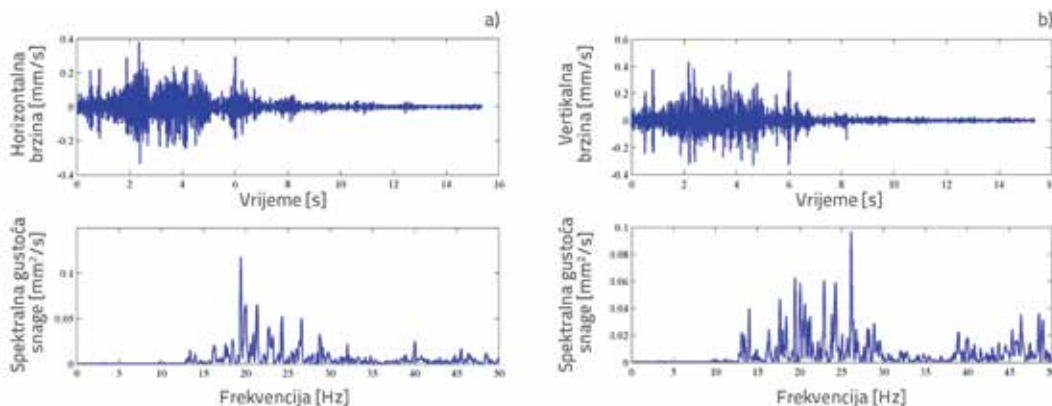
Interakcija tla i konstrukcije smanjuje vlastite frekvencije horizontalnih vibracija. Smanjenje frekvencije je najizraženije u prvom obliku vibracija i raste s brojem katova okvira uslijed efekta rotacije baze. Maksimalna razlika između vlastitih frekvencija horizontalnih vibracija za slučaj upetog i fleksibilnog temelja je 9.7 % za prvi oblik dvanaesterokatnog okvira. Utjecaj međudjelovanja tla i konstrukcije na vlastite frekvencije vertikalnih vibracija je mnogo više izražen. On ovisi o odnosu krutosti okvira i tla u vertikalnom smjeru. Utjecaj tla smanjuje vlastite frekvencije vertikalnih vibracija kod okvira sa 6 i 12 katova, a povećava vlastite frekvencije vertikalnih vibracija kod dvokatnog okvira, izuzev frekvencije prvog oblika. Maksimalna razlika između vlastitih frekvencija vertikalnih vibracija okvira za slučaj fleksibilnog i upetog temelja je 163.1 % za treći oblik dvokatnog okvira.

6.2. Mjerenje vibracija okvira

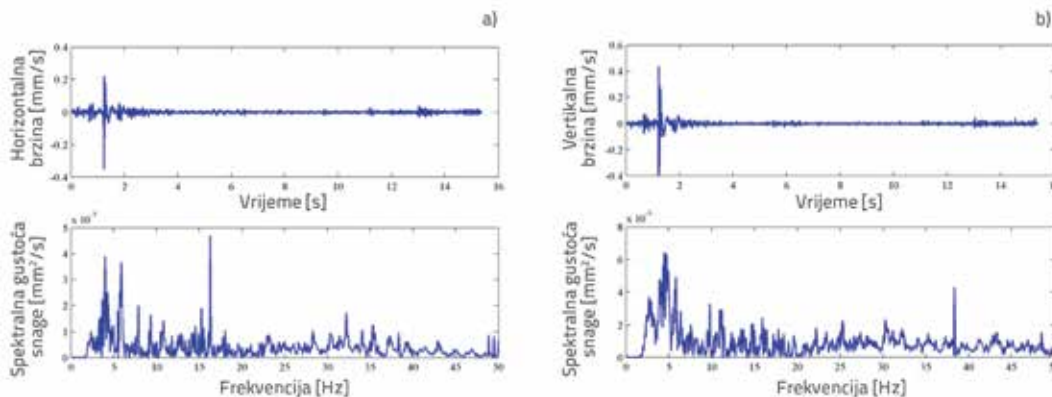
Vibracije uzrokovane prometom mjerene su u ulici Bulevar kralja Aleksandra u Beogradu u točki koja se nalazila na površini terena, ≈ 11 m od tračnica/prometnice (prosječna udaljenost od kolnika do zgrada u Bulevaru). Mjerenje brzine u tri ortogonalna pravca provedeno je opremom I/O System One. Korišten je trokomponentni geofon, prikazan na slici 9., [23].



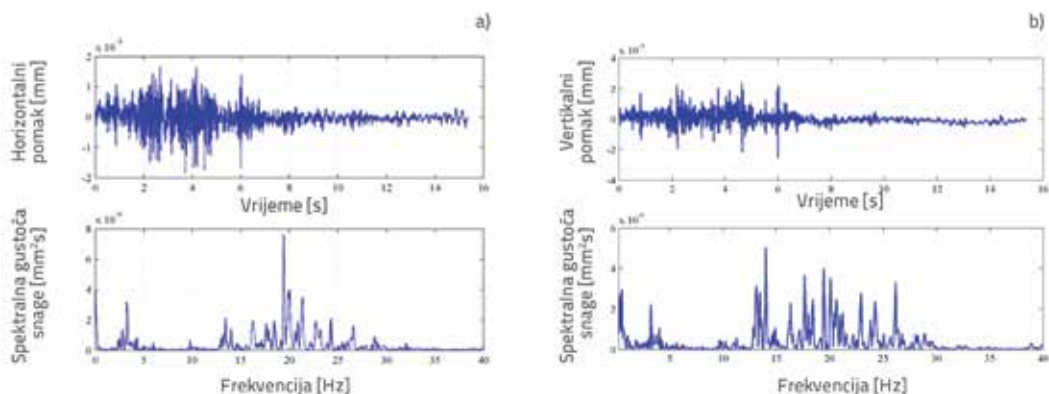
Slika 9. Geofon



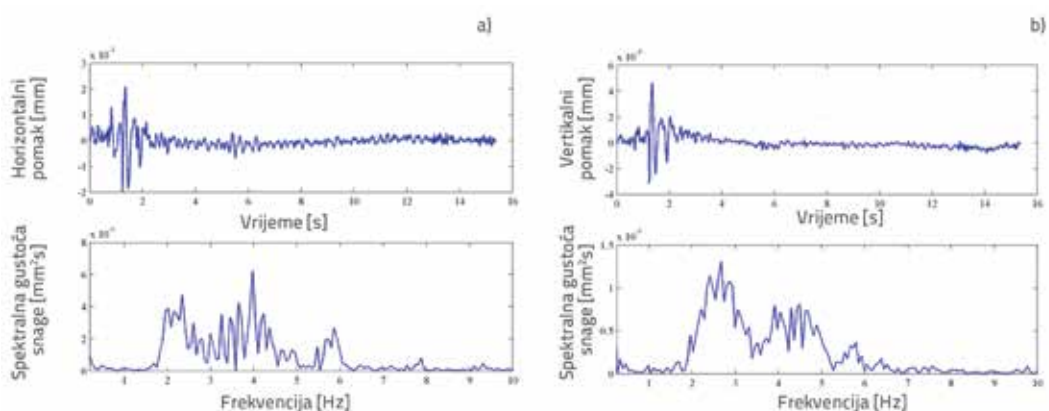
Slika 10. Vremenski zapis i spektralna gustoća snage za a) horizontalne i b) vertikalne brzine (tramvaj, $v=20$ km/h)



Slika 11. Vremenski zapis i spektralna gustoća snage za a) horizontalne i b) vertikalne brzine (kamion $v=50$ km/h)



Slika 12. Vremenski zapis i spektralna gustoća snage za a) horizontalne i b) vertikalne pomake (tramvaj, v=20 km/h)



Slika 13. Vremenski zapis i spektralna gustoća snage za a) horizontalne i b) vertikalne pomake (kamion, v=50 km/h)

Izvori vibracija pri mjerenju bili su:

- uobičajen promet,
- kamion nosivosti 14 tona koji se kreće brzinom od 50 km/h,
- kamion nosivosti 14 tona koji se kreće brzinom od 50 km/h preko gumene prepreke debljine 3 cm, širine 1 m, dužine 3 m, kojom se simulira prelazak vozila preko izbočina na kolniku,
- tramvaj koji se kreće brzinom od 20 km/h.

Najveće vibracije izazvalo je kretanje tramvaja i kamiona preko gumene prepreke. Zbog toga su ova dva prometna opterećenja korištena u proračunu djelovanja vibracija uzrokovanih prometom na okvire različite katnosti.

Vremenski zapisi i spektralne gustoće snage (*Power Spectrum Density*) za horizontalne i vertikalne brzine vibracija uslijed kretanja tramvaja i kamiona prikazane su na slikama 10-11. Vremenski zapisi pomaka tla dobiveni su integracijom vremenskih zapisa brzine i prikazani su na slikama 12-13 zajedno s odgovarajućim spektralnim gustoćama snage. U slučaju tramvaja, dominantne frekvencije brzine i pomaka su između 17 i 27 Hz za horizontalne vibracije, tj. između 13 i 27 Hz za vertikalne vibracije. U slučaju kamiona preko gumene prepreke dominantne frekvencije brzine su između 3 i 16 Hz za horizontalne vibracije, tj. 2 i 6 Hz za vertikalne vibracije, a za pomake između 2 i 6 Hz i za horizontalne i za vertikalne vibracije. Amplitude brzina i pomaka imaju veće vrijednosti u slučaju vertikalnih vibracija.

6.2.1. Rezultati provedenih analiza

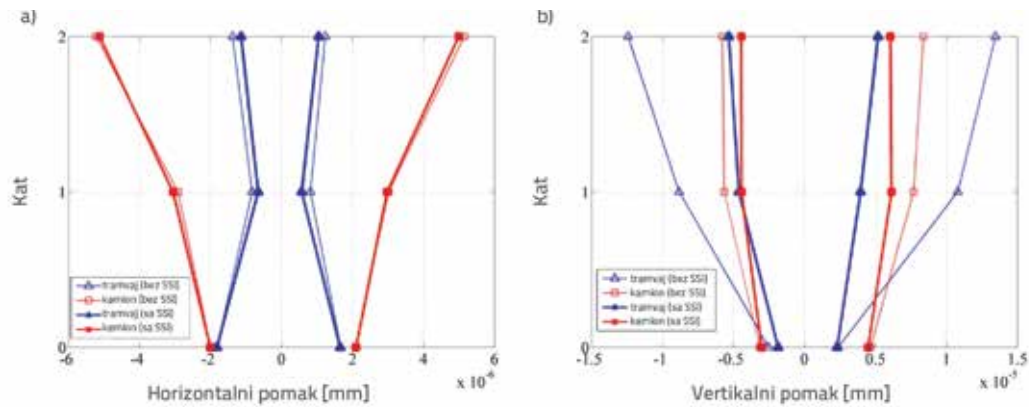
Numerička analiza okvira izloženih navedenim vibracijama uzrokovanih prometom, za slučaj upetog i fleksibilnog oslanjanja, provedena je primjenom programa razvijenog u MATLAB programskom jeziku. Okviri su izloženi pomacima podloge koji su jednaki pomacima uslijed kretanja vozila, slike 12 i 13. Rezultat analize je prikazan u obliku anvelopa vertikalnih i horizontalnih pomaka točaka po katovima okvira na slikama 14-16, pri čemu su vertikalni pomaci promatrani u sredinama greda. Analize su provedene sa i bez međudjelovanja tla i konstrukcije (eng. *soil-structure interaction* - SSI).

Horizontalni pomaci: Kretanje kamiona preko gumene prepreke izaziva veće horizontalne pomake nego kretanje tramvaja, i to kod svih okvira, zato što vlastite frekvencije horizontalnih vibracija okvira padaju u opseg dominantnih frekvencija vibracija tla uslijed kretanja kamiona (2-6 Hz). Pri tome, najveći horizontalni pomaci se javljaju kod dvokatnog okvira, čija je osnovna frekvencija 2.37 Hz, dok su najmanji horizontalni pomaci kod dvanaesterokatnog okvira.

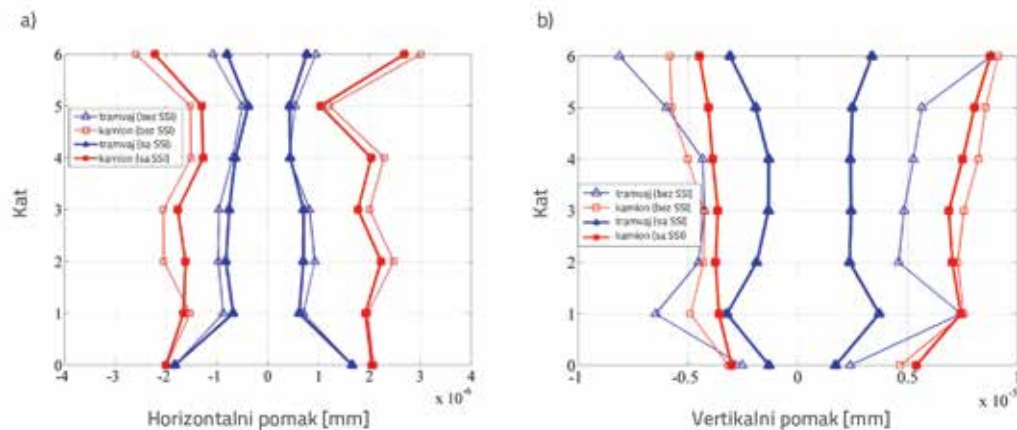
Vertikalni pomaci: Najveći vertikalni pomaci javljaju se na posljednjem katu. Na odgovor okvira u vertikalnom smjeru

utječu niži tonovi osciliranja. Pomaci uslijed kretanja kamiona preko gumene prepreke veći su od pomaka uslijed kretanja tramvaja u temelju konstrukcije. Međutim, kod upeto oslonjenih okvira sa 2 i 6 katova, kretanje tramvaja uzrokuje veće pomake vrha. Kod fleksibilno oslonjenih okvira ti pomaci su veći uslijed kretanja kamiona.

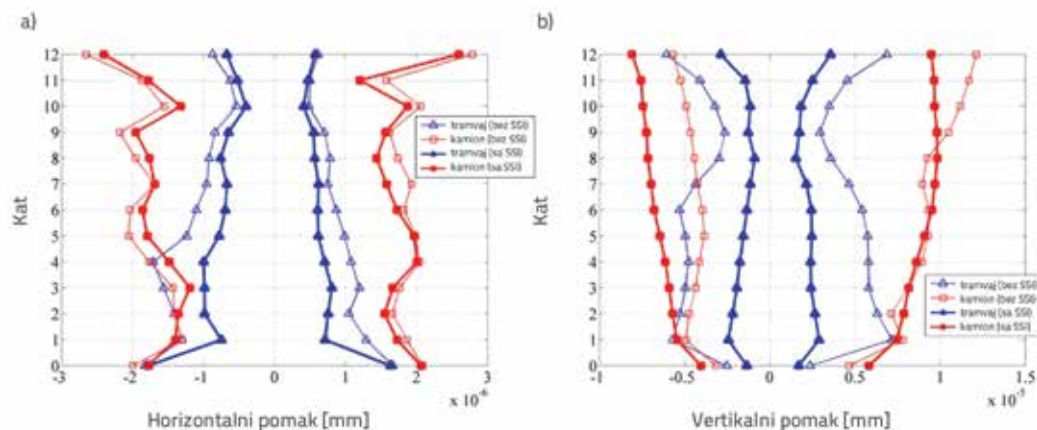
Interakcija tla i konstrukcije mijenja dinamički odgovor konstrukcije. Općenito, horizontalni i vertikalni pomaci konstrukcije se smanjuju kada se tlo uzme u obzir. Utjecaj je veći kod vertikalnih vibracija, slike 14.b, 15.b i 16.b. Što je odnos krutosti konstrukcije i krutosti tla veći, pomaci u vertikalnom smjeru su manji. Pojava je izraženija kod vibracija izazvanih kretanjem tramvaja.



Slika 14. Anvelope a) horizontalnih i b) vertikalnih pomaka dvokatnog okvira



Slika 15. Anvelope a) horizontalnih i b) vertikalnih pomaka šestokatnog okvira

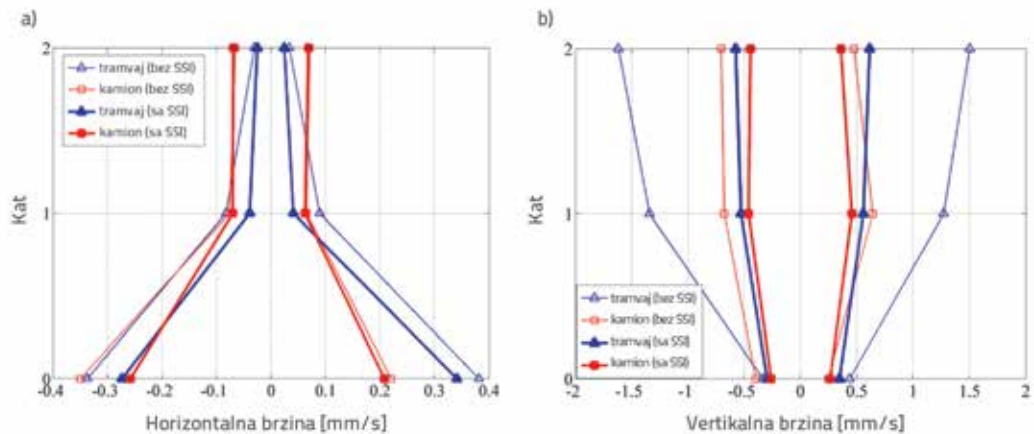


Slika 16. Anvelope a) horizontalnih i b) vertikalnih pomaka dvanaestokatnog okvira

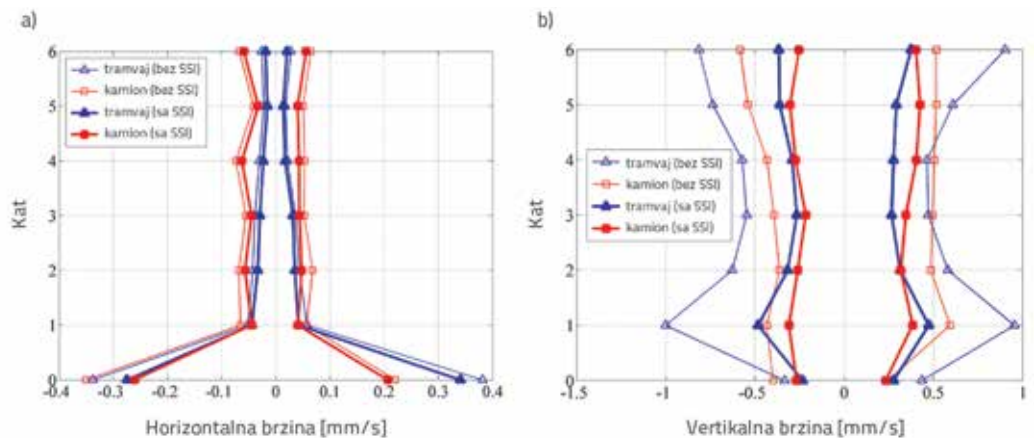
Budući da je utjecaj brzine titranja presudan za djelovanje vibracija na ljude, iz dobivenih su pomaka izračunane brzine vibracija. U frekvencijskoj domeni brzina $\dot{u}(\omega)$ je jednaka

$$\dot{u}(\omega) = i\omega \cdot u(\omega) \tag{25}$$

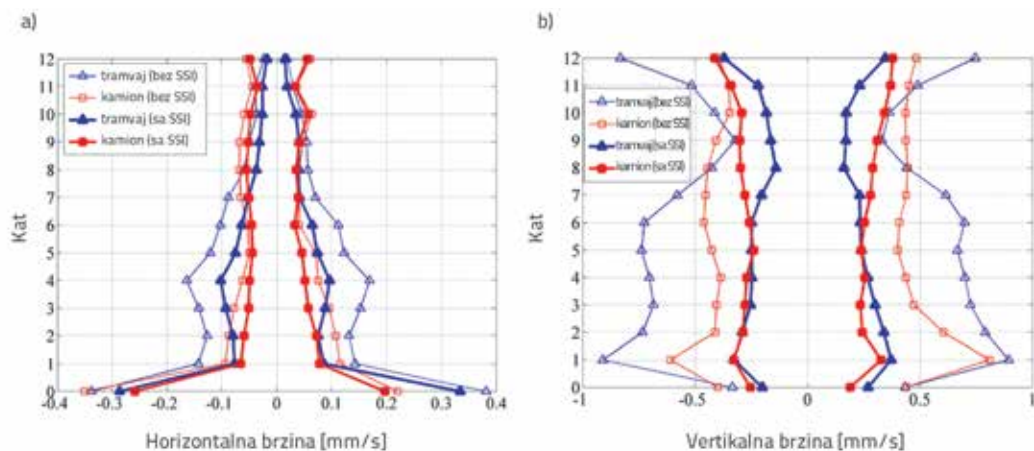
gdje je $u(\omega)$ izračunani pomak točke u frekvencijskoj domeni, ω je promatrana frekvencija, a $i = \sqrt{-1}$. U vremenskoj domeni brzina $\dot{u}(t)$ se dobiva Fourierovom transformacijom brzine $\dot{u}(\omega)$. Na slikama 17. do 19. prikazane su anvelope vertikalnih i horizontalnih brzina pomaka točaka po katovima okvira.



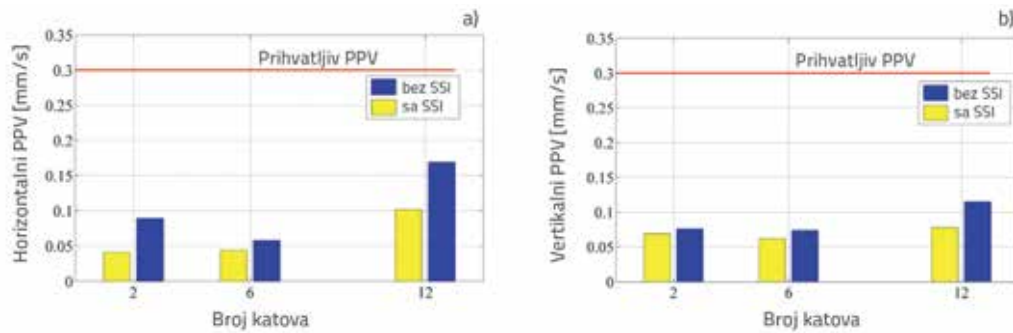
Slika 17. Anvelope a) horizontalnih i b) vertikalnih brzina dvokatnog okvira



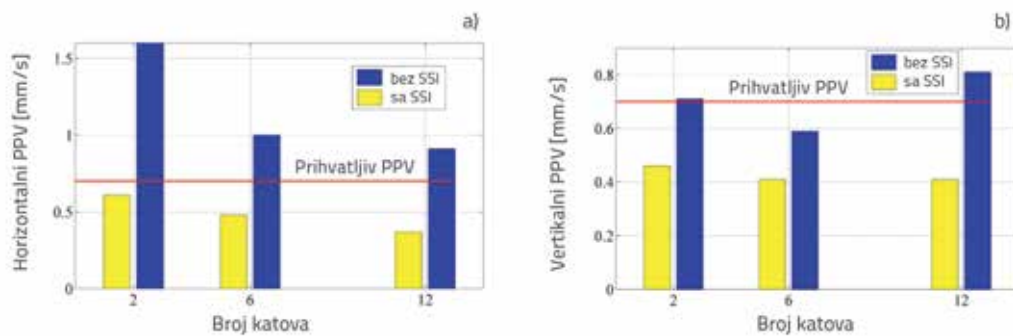
Slika 18. Anvelope a) horizontalnih i b) vertikalnih brzina šesterkatnog okvira



Slika 19. Anvelope a) horizontalnih i b) vertikalnih brzina dvanesterokatnog okvira



Slika 20. PPV za horizontalne vibracije uslijed kretanja a) tramvaja, b) kamiona (PPV - maksimalne brzine vibracija)



Slika 21. PPV za vertikalne vibracije uslijed kretanja a) tramvaja, b) kamiona (PPV - maksimalne brzine vibracija)

Horizontalna komponenta brzine: Tramvaj izaziva veće horizontalne komponente brzine u bazi, međutim na vrhu konstrukcije kretanje kamiona izaziva veće brzine horizontalnih pomaka točaka. Uslijed interakcije tla i konstrukcije, horizontalne brzine se smanjuju.

Vertikalna komponenta brzine: Tramvaj izaziva veće brzine vertikalnih pomaka upetih okvira negoli kamion jer vlastite frekvencije vertikalnih vibracija padaju u zonu dominantnih frekvencija vertikalnih brzina tla od kretanja tramvaja. Interakcija tla i konstrukcije smanjuje brzine u vertikalnom smjeru.

Na smanjenje pomaka i brzina točaka sustava tlo-konstrukcija u odnosu na upetu konstrukciju utječe, osim fleksibilnosti tla, i prigušenje u tlu (radijacijsko i materijalno). Može se reći da se tlo ponaša kao viskozni prigušivač.

7. Procjena utjecaja vibracija na ljude

Vibracije uzrokovane prometom rijetko mogu izazvati plastična oštećenja kod starih građevina, ali njihov utjecaj na ljude u gradovima može biti neugodan. Postoji više zemalja u kojima se razina dopuštenih vibracija uzrokovanih prometom definira odgovarajućim propisima. Budući da u Srbiji ne postoji odgovarajuća regulativa, utjecaj vibracija na ljude analiziran je sukladno britanskoj normi BS: 6472, [24]. U njoj se utjecaj vibracija uzrokovanih prometom na ljude procjenjuje na osnovi maksimalne

brzine vibracija u točki (PPV-peak particle velocity) na posljednjem katu zgrade

$$PPV = \max[\dot{u}(t)] \quad (26)$$

Maksimalne horizontalne i vertikalne brzine vibracija za sve okvire određene su i prikazane na slikama 20. i 21. Vrijednosti PPV za horizontalne vibracije ne prelaze propisanu granicu prema BS: 6472, za oba slučaja oslanjanja. Nasuprot njima, vrijednosti PPV za vertikalne vibracije u slučaju upetih okvira znatno prelaze propisanu granicu. Vrijednosti PPV za vertikalne vibracije značajno opadaju kada se interakcija tla i konstrukcije uzme u obzir, tako da padaju ispod dopuštenih vrijednosti. Na osnovi toga može se zaključiti da interakcija tla i konstrukcije može djelovati pozitivno na učinak vibracija, u smislu da smanjuje brzine vibracija koje nepovoljno djeluju na ljude u zgradama. Taj je učinak naročito izražen u slučaju "mekog" tla, tj. tla kod kojeg je brzina širenja posmičnih valova mala.

8. Smjernice za sprječavanje neželjenih vibracija uzrokovanih prometom

Vibracije uzrokovane prometom su niskofrekvencijski poremećaji čije frekvencije ovise o tipu i brzini kretanja vozila i mogu biti u rasponu od 1 do 30 Hz. To znači da one pobuđuju niže tonove osciliranja zgrada bez obzira na katnost i krutost konstrukcije. Zbog toga se smjernice za sprječavanje vibracija prije svega odnose na smanjenje vibracija na samom izvoru,

kao i na sprječavanje prenošenja vibracija od izvora do zgrade. Mjere za smanjenje vibracija u zgradama na prihvatljivu razinu jesu sljedeće:

- redovito održavanje kolnika
- kontrola prometa i brzine kretanja vozila
- postavljanje barijera u tlu između prometnice i zgrade
- povećanje razmaka između prometnice i zgrade
- izolacija temelja zgrada tj. izolacija stropova.

Neravnine na kolniku su glavni uzrok nastanka vibracija uslijed kretanja vozila. Mjera redovitog održavanja kolnika u gradovima značajno smanjuje amplitude vertikalnih vibracija, međutim ta mjera zahtijeva znatna financijska ulaganja. Kontrola prometa, tj. zabrana kretanja teških vozila i ograničenje brzine kretanja vozila je djelotvorna mjera koja se lako može primijeniti. Postavljanje kanala između prometnice i zgrade u potpunosti sprječava širenje vibracija kroz tlo. Osim otvorenih kanala koriste se i kanali s ispunom od materijala veće krutosti od tla (beton), a u novije vrijeme i zavjese od betonskih pilota promjera \varnothing 500-1000 mm. Navedene mjere primjenjuju se kod postojećih zgrada.

Kod novih zgrada vibracije se mogu smanjiti povećanjem razmaka između prometnice i zgrade. U slučaju površinskih valova vrijedi da je:

$$A_2 = A_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{1/2} e^{-\alpha(r_2 - r_1)} \quad (27)$$

gdje su A_1, A_2 amplitude vibracija u točkama 1 i 2 na udaljenosti r_1 i r_2 od izvora; α je koeficijent koji ovisi o tipu tla.

Kad je riječ o posebno važnim zgradama, moguće je vibracije smanjiti postavljanjem izolacije temelja ili izolacije stropova. Međutim, te su mjere veoma skupe i gotovo se i ne primjenjuju kod stambenih zgrada.

7. Zaključak

U radu je izložen jednostavan numerički model za 2D dinamičku analizu interakcije tla i konstrukcije u frekvenzijskoj domeni, u kojem je okvir modeliran spektralnim elementima, dok je dinamička krutost tla određena primjenom metode integralne transformacije. Na osnovi toga je razvijen računalni program za proračun 2D okvira primjenom programskog jezika MATLAB. Dinamički odgovor triju okvira različite katnosti, uslijed kretanja tramvaja i kamiona preko gumene prepreke, analiziran je za slučaj kada postoji interakcija i za slučaj kada nema interakcije tla i konstrukcije. Na osnovi rezultata analize zaključeno je sljedeće:

- interakcija tla i konstrukcije smanjuje vlastite frekvencije osciliranja okvira, a to smanjenje je veće za slučaj okvira niže katnosti i za slučaj vertikalnih vibracija
- odgovor konstrukcije je veći za okvire s krutim temeljem, tj. utjecaj tla smanjuje odgovor konstrukcije; što je odnos krutosti okvira i krutosti tla veći, povećava se učinak interakcije

- utjecaj interakcije konstrukcije i tla je naročito izražen kod vertikalnih vibracija svih okvira
- kod okvira s krutim temeljem najveće vertikalne pomake izaziva kretanje tramvaja, dok kod okvira kod kojih je uzet u obzir utjecaj interakcije konstrukcije i tla najveće vertikalne pomake izaziva kretanje kamiona preko gumene prepreke
- dvokatni okvir je najosjetljiviji na vertikalne vibracije, dok je dvanaesterokatni okvir najosjetljiviji na horizontalne vibracije izazvane kretanjem kamiona preko gumene prepreke
- maksimalne brzine horizontalnih vibracija na vrhu građevine su manje od dopuštenih vrijednosti prema BS: 6472, bez obzira na slučaj oslanjanja
- maksimalne brzine vertikalnih vibracija su veće od dopuštenih za modele okvira s krutim temeljem. Uzimanjem u obzir interakcije tla i konstrukcije, ove brzine padaju ispod granične vrijednosti, što znači da je učinak interakcije pozitivan.

Zbog negativnog utjecaja vibracija na ljude, potrebno je dinamičku analizu konstrukcije provesti pažljivo, a interakciju tla i zgrade uzeti u obzir u modelu za predviđanje vibracija uzrokovanih prometom. Posebnu pozornost treba obratiti na slučajeve kada je kruta konstrukcija temeljena na mekom tlu i kada brzina i vrsta ovjesa vozila prouzroči dominantne vibracije bliske vlastitim vibracijama sustava tlo-konstrukcija.

Rezultati su pokazali da se spektralni elementi (SE) mogu uspješno koristiti u analizi zajedničkog dinamičkog djelovanja okvirnih konstrukcija i tla. Predloženi numerički model ima prednosti nad standardnim linijskim modelima jer zahtijeva manji broj elemenata u analizi vibracija visokih frekvencija od modela koji primjenjuju metodu konačnih elemenata. Osim toga, utjecaj se tla može uzeti u obzir jednostavnim dodavanjem dinamičke matrice krutosti tla na dinamičku matricu krutosti konstrukcije. Na osnovi dobivenih pomaka u frekvenzijskoj domeni lako se mogu odrediti brzine i ubrzanja točaka konstrukcije.

Dobiveni numerički model jednostavan je, učinkovit i pouzdan i može se koristiti u analizi interakcije tla i okvira pri djelovanju različitih dinamičkih utjecaja: eksplozije, zabijanje pilota, potres i sl. Osim toga, u modelu je moguće promijeniti način temeljenja izmjenom dinamičke krutosti tla. Dinamičku krutost tla za jednostavnije slučajeve temeljenja moguće je preuzeti direktno iz literature [25], dok se u slučaju složenog načina temeljenja ona može odrediti primjenom neke od poznatih metoda, npr. metodom konačnih elemenata ili metodom graničnih elemenata.

Uputno je da se rezultati dobiveni na osnovi predloženog modela usporede s rezultatima detaljnog modela zgrade, kao i s vibracijama dobivenim mjerenjima na zgradi, na osnovi čega bi se mogli izvesti dodatni zaključci, što će biti predmet daljnjeg istraživanja.

Zahvala

Autori zahvaljuju Ministarstvu za prosvetu, nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije na finansijskoj potpori za znanstvenoistraživački projekt TR 36046 "Istraživanje uticaja vibracija od saobraćaja na zgrade i ljude u cilju održivog razvoja gradova", u okviru kojega je ovaj rad pripremljen.

Dodatak

Dinamička matrica krutosti za aksijalno naprezanje

$$\mathbf{K}_D^a = \frac{EA}{L} \frac{ikL}{1 - e^{-i2kL}} \begin{bmatrix} 1 + e^{-i2kL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1 + e^{-i2kL} \end{bmatrix} \dots k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

Dinamička matrica krutosti za savijanje

$$\mathbf{K}_D^b = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ \text{sym} & & k_{33} & k_{34} \\ & & & k_{44} \end{bmatrix}$$

$$k_{11} = k_{33} = \frac{(1+i)k^3(-i - e_2^2 + e_1^2(1 + ie_2^2))}{\Delta} \quad k_{13} = \frac{2k^3(ie_2 - ie_1^2e_2 + e_1(e_2^2 - 1))}{\Delta}$$

$$k_{22} = k_{44} = \frac{(1+i)k(-1 - ie_2^2 + e_1^2(i + e_2^2))}{\Delta} \quad k_{14} = -k_{23} = \frac{2k^2(e_2 + e_1^2e_2 - e_1(e_2^2 + 1))}{\Delta}$$

$$k_{12} = -k_{34} = \frac{ik^2(e_1^2 - 1)(e_2^2 - 1)}{\Delta} \quad k = \sqrt{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}$$

$$\Delta = 1 - 4e_1e_2 + e_1^2(1 + e_2^2), \quad e_1 = e^{ikL}, \quad e_2 = e^{kL}$$

Dinamička matrica krutosti za složeno stanje naprezanja

$$\mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_D^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_D^b \end{bmatrix}$$

LITERATURA

- [1] Hunaid, O., Tremblay, M.: Traffic-induced building vibrations in Montréal, *Can. J. Civ. Eng.*, 24, pp 736-753, 1997.
- [2] Crispino, M., D'apuzzo, M.: Measurement and Prediction of Traffic-Induced Vibrations in a Heritage Building, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 246 (2), pp. 319-335, 2001.
- [3] Francois, S., Pyl, L., Masoumi, H.R., Degrande G.: The influence of dynamic soil-structure interaction on traffic induced vibrations in buildings, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27, pp 655-674, 2007.
- [4] Hao, H., Ang, T. C., Shen J.: Building Vibration to Traffic-Induced Ground Motion, *Building and Environment*, Vol. 36, pp. 321-336, 2001.
- [5] Petronijević, M., Schmid, G.: Metode linearne dinamičke analize sistema tlo-objekat, *Izgradnja*, 62, pp. 541-554, 2008.
- [6] Nefovska-Danilović, M., Petronijević, M., Šavija B.: Traffic-induced vibrations of frame structures, *Can. Jour. Civ. Eng.* Vol 40 (2), pp. 157-171, 2013.
- [7] Grundmann, H., Trommer, E.: Transform Methods - What Can They Contribute to (Computational) Dynamics, *Computers and Structures*, 79, pp. 2091-2101, 2001.
- [8] Matlab, MathWorks Inc. *The Language of Technical Computing*. MATLAB 2011b.
- [9] Doyle, J. F.: *Wave Propagation in Structures*, Springer-Verlag, New York, Second edition, 1997.
- [10] Banerjee, J. R.: Dynamic stiffness formulation for structural elements: A general approach, *Computers and Structures*, 63, pp. 101-103, 1997.
- [11] Lee, U., Kim, J., Leung, A.Y.T.: The Spectral Element Method in Structural Dynamics, *The Shock and Vibration Digest*, 32, pp 451-465, 2000.
- [12] Petronijević, M.: Određivanje odgovora linijskih sistema primenom brze Fourier-ove transformacije, 18. jugoslovenski kongres teorijske i primenjene mehanike, V. Banja, 30. maj-3. jun, 1988, Srbija C1-29, 1988.
- [13] Penava, D.: Vibration analysis of frame structures using the spectral element method, Master thesis, Građevinski fakultet, Beograd, 2008.
- [14] Penava, D., Sigmund, V., Petronijević, M., Schmid, G.: Vibration analysis of frame structure excited with Rayleigh waves using spectral elements, International Scientific Symposium MODELING OF STRUCTURES, Mostar 13-15.11.2008, BiH, pp. 545-558
- [15] Šavija, B.: Dinamička analiza ramovskih konstrukcija u frekventnom domenu primenom metode spektralnih elemenata, diplomski-master rad, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Srbija, 2009.
- [16] Šavija, B., Nefovska-Danilović, M., Petronijević, M.: Modalna analiza ramovskih konstrukcija primenom metode spektralnih elemenata, Zbornik radova 13. kongresa DGKS, Zlatibor-Čigota, 22-24.09.2010. Srbija, pp. 365-372
- [17] Achenbach, J.D.: *Wave propagation in elastic solid*, North-Holland, Amsterdam-London, 1973.
- [18] Rastandi, J. I.: Modelization of Dynamic Soil-Structure Interaction Using Integral Transform-Finite Element Coupling, Lehrstuhl für Baumechanik der Technischen Universität München, 2003.

- [19] Radišić, M.: Primijena metoda integralne transformacije (ITM) za određivanje pomeranja i napona u tlu usled harmonijskog opterećenja, diplomski-master rad, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Srbija, 2010.
- [20] Bracewell, R. N.: *The Fourier Transform And Its Applications*, McGraw-Hill, Third Edition, 2000.
- [21] Radišić, M., Nefovska-Danilović, M., Petronijević, M.: *Application of integral transform method to calculate impedance functions*, Third Serbian Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Vlasina Lake, 5-8 July, 2011, Serbia, pp 965-974, 2011.
- [22] Bozdogan, K. B.: Učinak elastičnosti temelja na dinamičko ponašanje zgrade, *GRAĐEVINAR 63* (2011) 4, pp.335-340
- [23] Petronijević, M., Nefovska-Danilović, M.: Geodinamička analiza osetljivosti objekata na dejstvo postojećih vibracija prema postojećim standardima i procena njihove osetljivosti na dejstvo lakog metroa, GEOZAVOD i Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2006.
- [24] British Standard Institution *Guide to evaluation of human exposure to vibration in buildings* (1-80 Hz): BS6472:1992, London, 1992.
- [25] Sieffert, J.G., Ceaver, F.: *Handbook of impedance functions*, Oquest Editions, Presses Academiques, 1992.



INŽENJERSKI PROJEKтни ZAVOD d.d.

10000 Zagreb, Prilaz baruna Filipovića 21
 telefon: +385 (0)1 3717 300
 telefax: +385 (0)1 3717 309
 e-mail: uprava@ipz.hr

Djelatnosti tvrtke

konzalting, izrada cjelokupne projektne dokumentacije, studija, studija utjecaja na okoliš, stručnih podloga za izdavanje lokacijskih dozvola, investicionih programa, stručnih mišljenja, revizija i recenzija, vođenje upravnih postupaka (suglasnost i građevinske dozvole) te nadzor za:

- ↳ autoceste
- ↳ državne i ostale ceste
- ↳ gradske prometnice
- ↳ prometna čvorišta
- ↳ mostove i vijadukte
- ↳ tunele
- ↳ vodovode, kanalizacije i ostale hidrotehničke objekte
- ↳ prateće uslužne objekte na autocestama i cestama
- ↳ prometnu signalizaciju
- ↳ zračne luke
- ↳ tramvajske pruge
- ↳ željeznice
- ↳ ostale radove iz područja niskogradnje



www.ipz.hr